Appunti sulle funzioni

Classe: V G/H

Il concetto di funzione è uno dei concetti più importanti per la matematica, perché con essa si cerca il legame che esiste fra grandezze diverse, cosa che è il fine ultimo della matematica che nei secoli si è sempre prodigata per cercare le cause, le implicazioni, le conseguenze dei fenomeni osservati. Cominciamo con la definizione:

Definizione di funzione:
Dati due insiemi A e B si chiama funzione una relazione che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B (si scrive $f : A \to B$ *)*
Se A e B sono sottoinsiemi di R, la funzione si dice reale di variabile reale.

L'Insieme A è detto insieme di partenza o Dominio, l'insieme B è detto insieme di arrivo.
Nelle funzioni dette matematiche la f è contraddistinta da un' espressione analitica ed è assegnata mediante un equazione del tipo: $y = f(x)$ (oppure $f(x) = ...$ dove al posto dei puntini compare l'espressione analitica della funzione) , in cui x è l'elemento generico di partenza e y è il trasformato tramite la funzione f. Il trasformato è detto anche immagine di x, l'insieme delle immagini di una funzione è detto codominio di f.

Esempio:
Sia data la funzione $y = x^2 - 3x$
Preso x= 2 come valore di partenza , come si denota il trasformato e come si trova ?

L'immagine di x=2 è dato da $f(2)$ e si trova sostituendo alla x generica il valore particolare 2, cioè $f(2) = (2)^2 - 3 \cdot (2) = -2$.

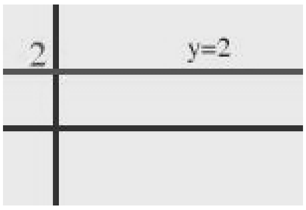
L'obiettivo di una funzione è quello di riuscire a costruire il suo grafico nel piano cartesiano, in quanto cosi facendo si determina il comportamento della funzione al variare di x nel dominio e quindi conosco il legame tra i due insiemi in ogni punto in cui la funzione esiste (un punto nel piano cartesiano è dato dalla coppia $(x, f(x))$, cioè da due qualsiasi dei valori messi in relazione dalla funzione f).

Per questo il resto della trattazione è legato alla ricerca del grafico nel piano cartesiano.
Riguardo ad esso si può cominciare col ricordarci di alcuni grafici di curve viste negli anni passati: La retta e la parabola.
Per la retta l'espressione analitica che la definisce è $y = mx + q$ è il suo grafico lo si può trovare determinando due punti (per due punti passa una sola retta), come nell'esempio:
$y = 3x - 2$
Scelgo 2 valori per x a caso (ad esempio 0 e 2
Per $x = 0$ segue $y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$
Per $x = 2$ segue $y = 3 \cdot 2 - 2 = 4$
Disegno nel piano i punti *A (0,-2)* e *B(2,4)* e ne traccio la congiungente facendola proseguire alle estremità e tratteggiando.

Ricordo due tipi di rette particolari:

Rette parallele all'asse *x*: <u>*y = k*</u>.

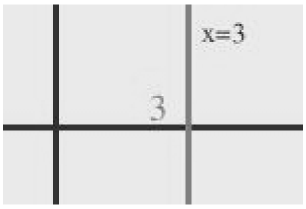
Per esempio $y = 2$



Asse *x*: <u>*y = 0*</u>

Rette parallele all'asse *y*: <u>*x = k*</u>.

Per esempio $x = 3$



Asse *y*: <u>*x = 0*</u>

Per la <u>parabola</u> l'espressione più generale è $y = ax^2 + bx + c$ e per trovarne il grafico basta seguire il metodo seguente:

1. trovare le coordinate del vertice $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$
   trovare (se esistono) le intersezioni con l'asse *x*.
2. trovare l'intersezione con l'asse y
3. unire in un grafico i punti trovati, (facendoci aiutare dalla simmetria della curva).
4.

Esempio:

$y = x^2 + 2x - 8$ seguiamo lo schema.

1. coordinate vertice:

$$V_x = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1 \qquad V_y = \frac{-\left(2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)\right)}{4 \cdot 1} = -9$$

2. intersezioni con l'asse *x*.

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 8 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = x^2 + 2x - 8 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\left(2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)\right)}}{2 \cdot 1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2 \cdot 1} \\ y = 0 \end{cases}$$

ho due soluzioni: la prima $\begin{cases} x_1 = -4 \\ y = 0 \end{cases}$ e la seconda $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ per cui ho i due punti *A(-4,0)* e *B(2,0)*

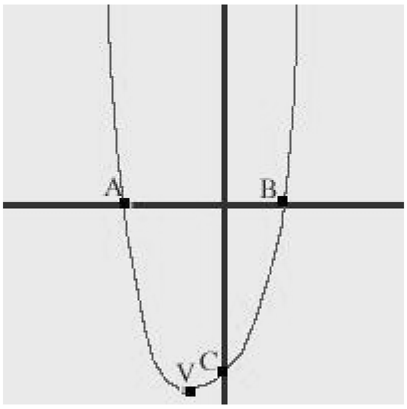
3. L'intersezione con l'asse *y*:

Basta fare il sistema fra la parabola e l'asse delle y (equazione sopra)

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 8 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = -8 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il punto di intersezione è *C (0,-8)*.

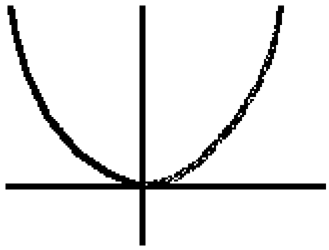
4. Unire in un grafico i punti trovati:



Prima di passare allo studio di funzione addentriamoci di più sullo studio di alcune caratteristiche della funzione.

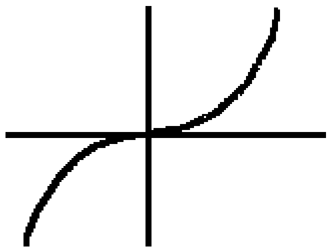
1. Simmetrie della funzione: pari o dispari
2. Estremo superiore(inferiore), massimo(minimo) di una funzione
3. Funzioni crescenti o decrescenti
4. Funzione composta.

1. Una funzione si dice <u>pari</u> se cambiando di segno la variabile indipendente *x* la funzione non cambia di segno, in formula: $f(-x) = f(x)$. Un esempio è la parabola $y = x^2$ il cui grafico è il seguente:



Si deduce che quando una funzione è pari il grafico è simmetrico rispetto all'asse *y*.
Per questi tipi di funzioni basterà costruire solo metà grafico poi farne il simmetrico. (in grigio la parte ribaltata)

Altrimenti una funzione si dice <u>dispari</u> se cambiando di segno la variabile indipendente *x* la funzione cambia di segno: $f(-x) = -f(x)$. Un esempio è la funzione $y = x^3$ il cui grafico è il seguente:



Si deduce che quando una funzione è dispari il grafico è simmetrico rispetto all'origine.
Per questi tipi di funzioni basterà costruire solo metà grafico poi farne il simmetrico. (in grigio la parte ribaltata).

2. L'immagine di una funzione è formata dai valori assunti da y al variare di x nel dominio della funzione. Introduciamo alcune importanti definizioni applicate direttamente all'insieme immagine, che ci torneranno utili nel proseguo del nostro lavoro: estremo superiore ed inferiore.
   Intanto occorre definire cosa vuol dire maggiorante(minorante) di un insieme non vuoto di elementi.
   <u>Maggiorante/Minorante</u>
   Sia I un insieme se esiste in R un numero M maggiore(minore) o uguale a tutti gli elementi di A, esso è un maggiorante(minorante)
   <u>Estremo superiore ed inferiore</u>
   Sia $f : D \rightarrow R$ *una funzione e sia I l'insieme immagine della funzione. L'estremo superiore(inferiore) dell'insieme I, se esiste, è il minimo(massimo) dei maggioranti(minoranti) ed è contraddistinto con sup f(x) (inf f(x)).*
   <u>Massimo e minimo</u>
   Se l'estremo superiore(inferiore) è un numero reale e appartiene a I allora è detto massimo(minimo) di f(x).
   E' possibile estendere l'insieme dei numeri reali con due nuovi elementi, che permettono di attribuire estremo superiore(inferiore) anche a insiemi superiormente(inferiormente) illimitati. Per convenzione definiamo:
   - $+\infty$ (detto più infinito) l' estremo superiore di ogni insieme superiormente illimitato
   - $-\infty$ (detto meno infinito) l' estremo inferiore di ogni insieme inferiormente illimitato

   Intuitivamente, si può pensare al simbolo $+\infty$ come a un elemento "più grande " di tutti i numeri reali positivi, e $-\infty$ come a un elemento "più piccolo" di tutti i numeri reali negativi.

   Con queste considerazioni si può introdurre un modo alternativo alla notazione consueta algebrica per rappresentare alcuni insiemi che scaturiscono dallo studio di una funzione, questa nuova modalità è detta per intervalli, ecco lo schema:

Intervalli limitati		
Tipo di intervallo	Notazione con le parentesi	Notazione algebrica
Intervallo chiuso	$[a,b]$	$a \le x \le b$
Intervallo aperto	(a,b)	$a < x < b$
Intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra	$[a,b)$	$a \le x < b$
Intervallo chiuso a destra e aperto a sinistra	$(a,b]$	$a < x \le b$
Intervalli illimitati		
Chiuso,illimitato a destra	$[a,+\infty)$	$x \ge a$
Aperto,illimitato a destra	$(a,+\infty)$	$x > a$

Aperto,illimitato a sinistra	$(-\infty, a)$	$x < a$
Chiuso,illimitato a sinistra	$(-\infty, a]$	$x \leq a$

Dopo aver introdotto alcuni concetti legati alla struttura di ordine di R(estremo superiore ed inferiore, massimo e minimo), rivolgiamo la nostra attenzione ad alcune nozioni legate alla struttura metrica di R, cioè al concetto di distanza, con la definizione di intorno, al quale sono collegati altri concetti in analisi, come il limite.

Intorno di un punto

Si dice intorno di un numero reale x_0 ogni intervallo aperto contenente x_0.

Per esempio sono intorni di $x_0 = 1$ gli intervalli $(0,3)$ e $(-1,3)$, mentre non sono intorni dello stesso punto gli intervalli $(2,3)$(perché non contiene 1) né $[-1,3]$ (perché chiuso).

Intorno di meno infinito e di più infinito

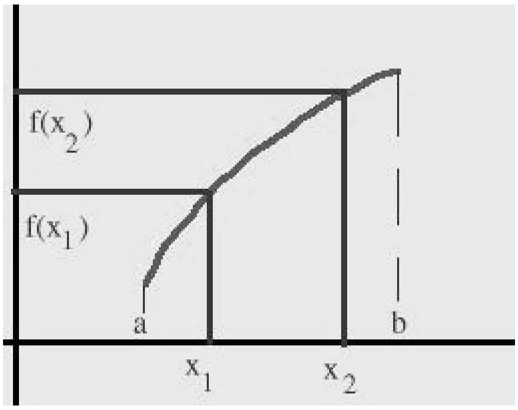
Chiamiamo intorno di meno infinito ogni intervallo del tipo $(-\infty,-M)$ e intorno di più infinito ogni intervallo del tipo $(+M,+\infty)$, con M reale positivo.

3. Funzioni crescenti e decrescenti.

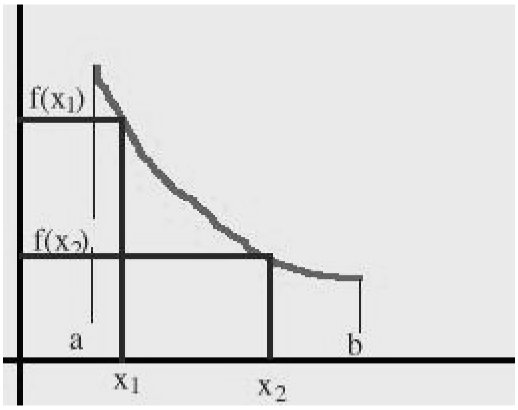
Intuitivamente una funzione si dice crescente e decrescente se spostandosi lungo la curva da sinistra a destra si sale o si scende, matematicamente si hanno queste definizione (che riprendono l'intuizione)

Funzione crescente(decrescente). *Data una funzione $y = f(x)$ si dice crescente(decrescente) nell'intervallo $[a,b]$, se per tutti i punti dell'intervallo da $x_1 < x_2$ segue $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).*

Crescenza



Decrescenza



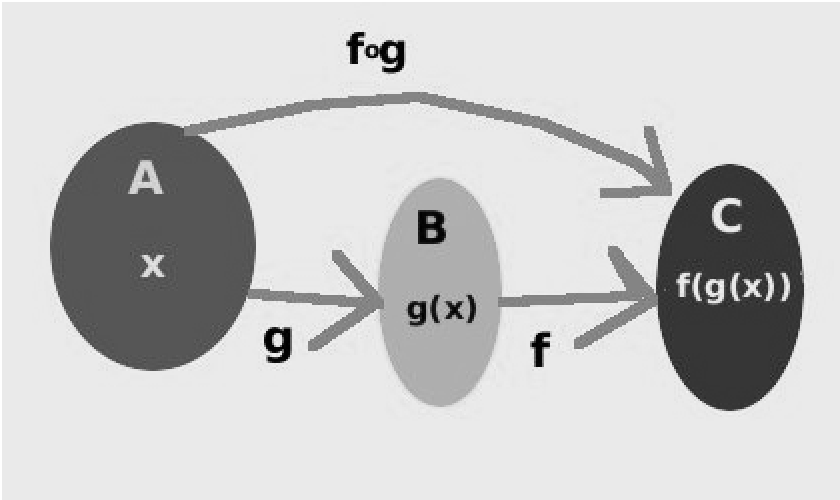
4. Funzione composta.

Un importante operazione tra funzioni è quella di composizione, che permette di definire una nuova funzione a partire da due funzioni *f* e *g* assegnate. Tante funzioni con cui poi si avrà a che fare sono funzioni composte e vederle come tali semplifica eventuali azioni che dobbiamo compiere su esse.

Funzione composta

Date due funzioni f e g, si dice funzione composta di f e g , e si indica con il simbolo $f \circ g$ (che si legge :" f composto g "), la funzione definita da : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Affinché sia possibile calcolare $f(g(x))$ $g(x)$ deve appartenere al dominio di *f*, in quanto il dominio di $(f o g)$ è costituito da tutti gli elementi appartenenti al dominio di *g* tali che $g(x)$ appartiene al dominio di *f* , come si deduce dallo schema seguente:



Non occorre spaventarsi dietro ad un esercizio che richiede la funzione composta di due date, poiché per trovare l'espressione analitica della funzione composta basta sostituire al posto di *x* della prima funzione l'espressione della seconda. Come nell'esempio:

Date $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 2$ l'espressione della funzione composta $(f o g)$ si determina sostituendo $x - 2$ della seconda funzione nella variabile *x* della prima funzione $(f o g)(x) = \sqrt{x - 2}$ così come $(g o f)$, cioè: $(g o f)(x) = \sqrt{x} - 2$.

Per studiare il grafico di una funzione basta seguire lo schema seguente, in cui ad ogni punto corrisponde un azione da fare e rappresentare nel piano cartesiano.

1. Ricerca del campo di esistenza della funzione
2. Intersezione con gli assi coordinati
3. Segna della funzione
4. Studio degli asintoti con i limiti
5. Studio dei massimi e minimi con la derivata prima

1° passo:
Data una qualsiasi espressione matematica posta nella forma $y = f(x)$, se non si definisce l'insieme di partenza essa può anche non essere una funzione, occorre quindi ricercare il dominio espresso dalla relazione data, tanto vale, poi, trovare il più grande dominio in cui la relazione può essere definita una funzione, cioè il campo di esistenza.
Per determinarlo basta sapere con quali tipi di funzione posso avere a che fare e per questo basta prendere in considerazione la classificazione delle funzioni, eccone lo schema delle sole funzioni che interessano alla trattazione. Esempi

- Algebriche
  - Fratte → $y = \dfrac{x - 2}{x + 5}$
  - Irrazionali → $y = \sqrt{x - 2}$

Per quanto riguarda il campo di esistenza di questi tipi di funzione si segue lo schema successivamente riportato:

Funzioni algebriche	
Tipo di funzione	Campo di esistenza
Fratta	$R - \{i\ valori\ che\ annullano\ il\ deno\min atore\}$
Irrazionale	$con\ indice\ pari \quad Radicando \geq 0$ $con\ indice\ dispari \quad R$

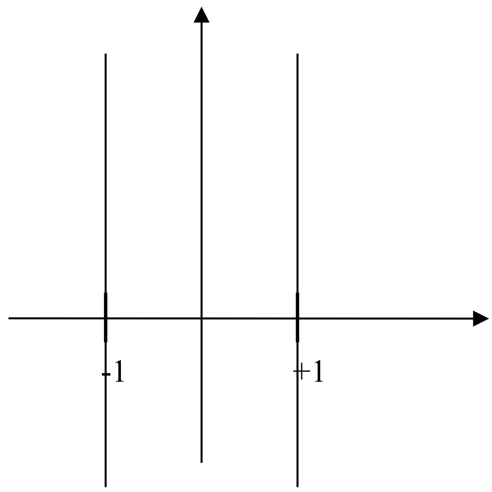
Il campo di esistenza deve essere espresso con il metodo degli intervalli.
Se la funzione è di entrambi i tipi allora fra le condizioni occorre eseguire il sistema.
Il campo di esistenza oltre a essere importante per far si di essere in presenza di una funzione, è la prima informazione che abbiamo su di essa e deve essere espressa nel piano cartesiano.
Per la fratta si traccia una retta verticale (parallela all'asse x) passante per ogni valore di x che annulla il denominatore, mentre per l'irrazionale si toglie la parte di piano che non fa parte del campo di esistenza, e si traccerà un linea verticale tratteggiata nei punti estremi del campo di esistenza presi.
Come negli esempi:

$$y = \frac{x-2}{x^2-1}$$

$x^2 - 1 = 0$ che dà come soluzioni

$x = \pm 1$, Campo di esistenza: $R - \{-1, +1\}$

quindi nel piano cartesiano:

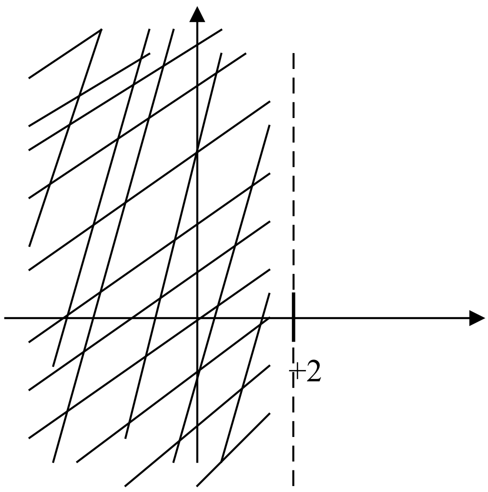


$$y = \sqrt{x-2}$$

$x - 2 \geq 0$ che dà come soluzione

$x \geq 2$, Campo di esistenza: $[+2, +\infty)$

quindi nel piano cartesiano:



Si cancella la parte di piano cartesiano dove la funzione non esiste.
Se la funzione fosse sia fratta che irrazionale occorre fare il sistema come nel seguente esempio

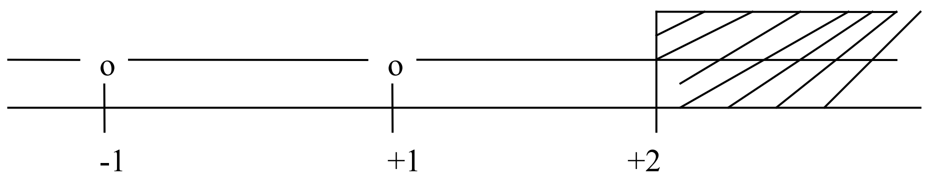
$$y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-1}$$

Per la fratta:
$x^2 - 1 = 0$ quindi
Campo di esistenza: $R - \{-1, +1\}$

Per l'irrazionale:
$x - 2 \geq 0$ quindi
Campo di esistenza: $[+2, +\infty)$

Per il campo di esistenza totale occorre fare il sistema: $\begin{cases} [+2, +\infty) \\ R - \{-1, +1\} \end{cases}$ che si sviluppa facendo il

grafico di verità o di verifica:



Quindi la soluzione è $[+2, +\infty)$ e lo si rappresenta nel piano cartesiano.

2° passo
Le intersezioni con gli assi.
Si tratta di calcolare le coordinate dei punti in cui la funzione incontra gli assi coordinati,per fare cio' occorre fare:

- il sistema tra la funzione e l'asse delle x (y=0)
- il sistema tra la funzione e l'asse delle y (x=0)
  quest'ultimo valore corrisponde sempre al termine noto

Un esempio chiarira' meglio il concetto:
considero la funzione
$y = x^2 - 4$
Cerco le intersezioni con gli assi
Faccio il sistema tra la funzione e l'asse delle x

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

ho due punti di intersezione con l'asse delle x:
A(-2 , 0)   B(2 , 0)

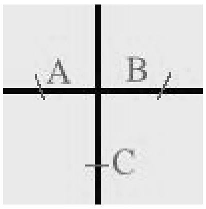
Faccio il sistema tra la funzione e l'asse delle y

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

poiche' ad x sostituisco zero la y sara' sempre uguale al temine noto

$$\begin{cases} y = -4 \\ x = 0 \end{cases}$$

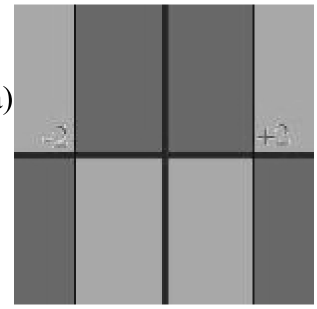
Il punto di intersezione con l'asse y e'
C(0 , -4)
sul grafico a destra sono riportati i punti di intersezione.



<u>Nota bene:</u> Se la funzione è fratta o irrazionale nel momento in cui sostituisco lo zero della variabile y nell'equazione della funzione, posso trovarmi con una equazione fratta o irrazionale. Nel primo caso dovrei discutere e porre il denominatore diverso da zero, ma poiché eseguo il calcolo all'interno del campo di esistenza della funzione, basterà che tolga il denominatore e vada avanti col numeratore; nel caso dell'irrazionale occorrerebbe fare il sistema tra l'equazione elevata al quadrato e il campo di esistenza della radice, sia per indice pari che dispari, essendo ancora il calcolo all'interno del campo di esistenza della funzione basterà semplicemente elevare al quadrato e togliere la radice e andare avanti col radicando.

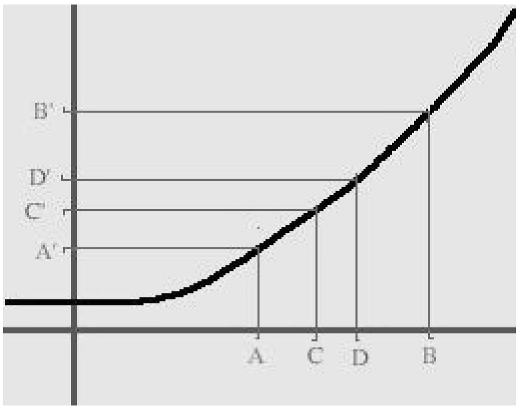
3° Passo
Il segno della funzione.
Serve per individuare in quali parti del piano passera' il grafico della funzione:
Si deve porre la funzione maggiore di zero e trovare per quali valori di x e' verificata: per tali valori il grafico sara' sopra l'asse delle ascisse mentre per valori diversi sara' sotto.

Vediamo un semplice esempio
considero la funzione
$y = x^2 - 4$
pongo
$$x^2 - 4 \geq 0$$
considero l'equazione associata
$$x^2 - 4 = 0$$
che ha soluzioni
$x = -2$ e $x = +2$
avendo due soluzioni reali e distinte la disequazione sara' verificata per valori esterni alle radici cioe'
$(-\infty, -2) \cup (+2, +\infty)$
quindi posso individuare le aree in cui si trovera' la funzione (in scuro ho indicato dove non passa la funzione mentre in chiaro ho indicato dove passa)



4° Passo
Studio dei limiti.
Se la funzione e' il concetto di base per la matematica il limite e' il concetto di base per le funzioni: infatti e' il limite che ci permette di superare i paradossi dovuti all'insufficienza del concetto di punto, perché ci permette di utilizzare il concetto di intervallo.

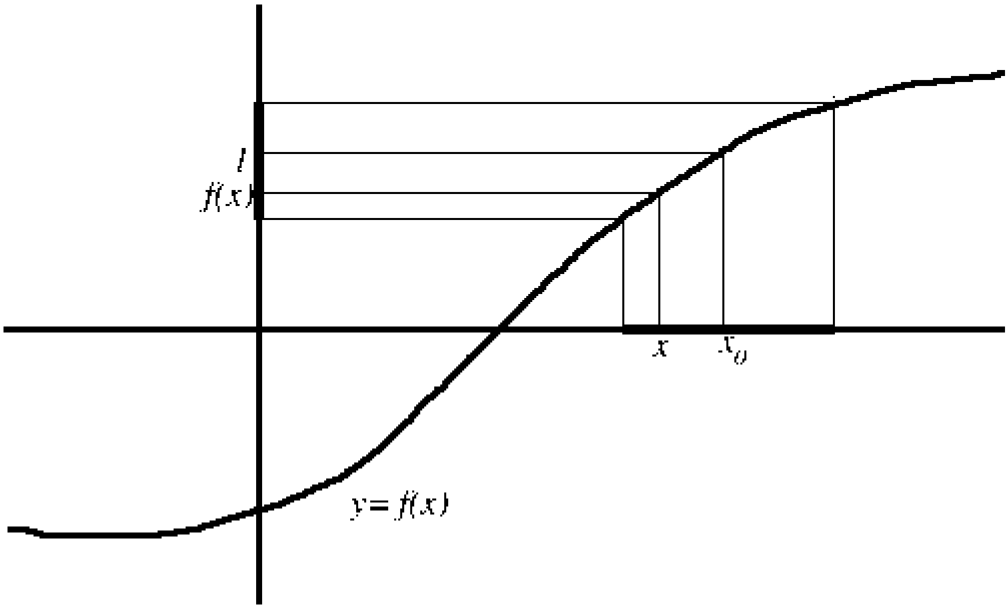
Teoricamente il limite e' una cosa molto semplice: se io considero un piccolo intervallo sull'asse delle x ad esso corrisponderà un intervallo più o meno piccolo sull'asse delle y; se quando restringo l'intervallo sull'asse delle x mi si restringe anche l'intervallo corrispondente sull'asse delle y allora ho un limite
In figura all'intervallo AB corrisponde l'intervallo A'B' ed all'intervallo più piccolo CD corrisponde un intervallo più piccolo C'D'; allora posso avvicinarmi ad un punto quanto voglio: basta rendere sempre più piccolo l'intervallo sulle x.



Poiché l'intervallo posso renderlo piccolo quanto voglio allora posso sostituirlo al concetto di punto

Il problema e' tradurre un concetto così semplice in linguaggio matematico.

Limite finito di una funzione in un punto
Il concetto espresso precedentemente e' abbastanza comprensibile, diventa piu' complicato l'esprimerlo in forma matematica
Per prima cosa, siccome si parla di limite di una funzione e la funzione e' come variano i punti sull'asse *y* partiremo da un intervallo sull'asse *y* e diremo che allo stringersi di un intervallo sulle *y* avvicinandosi ad un valore *l* si stringe anche l'intervallo corrispondente sulle *x* avvicinandosi ad x_0



Per dire questo consideriamo sull'intervallo delle X (quello marcato piu' scuro) un qualunque punto *x* a cui corrisponde *f(x)* sull'asse Y. Per rendere piccoli gli intervalli bastera' dire che *f(x)* debba appartenere ad un intorno qualsiasi di *l* e contemporaneamente *x* apparterrà ad un intorno qualsiasi di x_0, cosicché la funzione assume valori vicini quanto si vuole a *l* per valori di *x* sempre più vicini a x_0.
Ora siamo pronti a dare la definizione matematica:
<u>Definizione di limite finito in un punto</u>.
Siano $x_0 \in R$, $l \in R$, *e sia* $f(x)$ *una funzione definita in un intorno di* x_0, *eccetto al più* x_0.
Diremo che il limite della funzione $f(x)$ *per x che tende a* x_0 *è l e scriveremo:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

quando si verifica che, per ogni intorno U di l, esiste un intorno V di x_0, *tale che per ogni* $x \in V$ *, con* $x \neq x_0$, *risulta* $f(x) \in U$.

In un punto x_0 visto che sta sopra una retta mi posso avvicinare solo in due direzioni, da destra o da sinistra, ovviamente se il valore del limite non cambia i due limiti destro e sinistro devono coincidere, tuttavia è definito anche il limite destro e sinistro sostituendo nella definizione intorno destro o sinistro, come notazione:

Limite destro:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

Limite sinistro:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

Esistono quattro tipi di limite:

1° Tipo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

2° Tipo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

3° Tipo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

4° Tipo

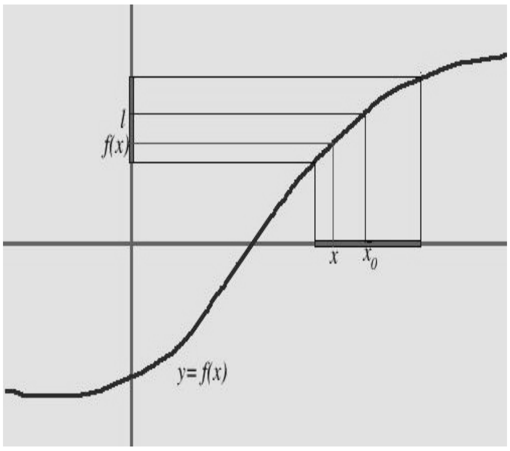
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Per la definizione di ognuno è valida quella generale data in precedenza.

Ciascuno dei suddetti limiti fornisce un informazione che può essere espressa nel piano cartesiano, ecco lo schema:

1° Tipo

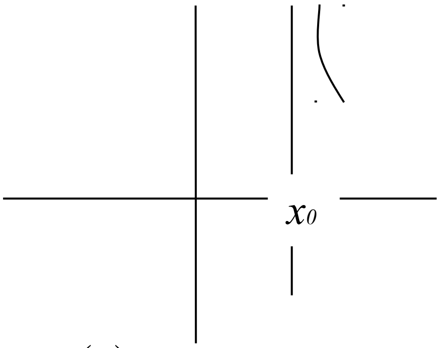
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$



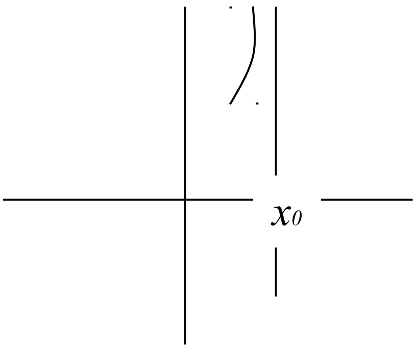
2° Tipo

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ esso si suddivide nei seguenti quattro limiti:

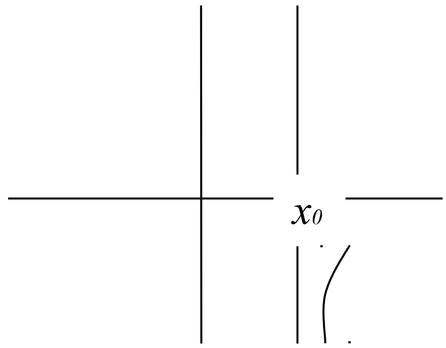
a. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$



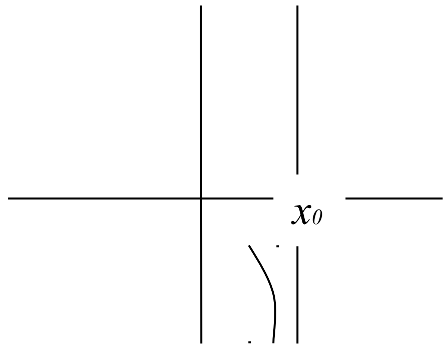
b. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$



c. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$



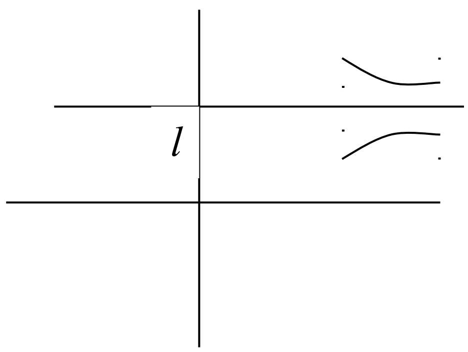
d. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$



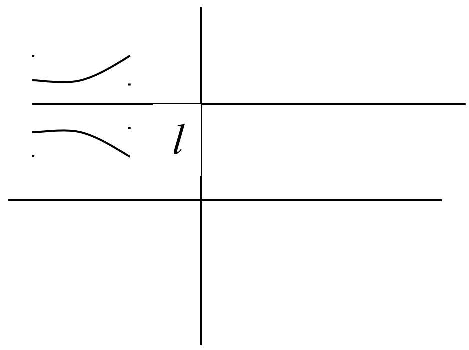
3°Tipo

$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ esso si suddivide nei seguenti due limite:

a. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$



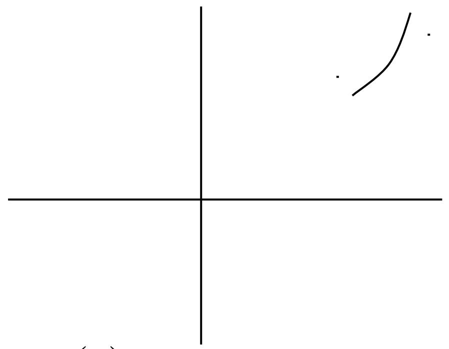
b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$



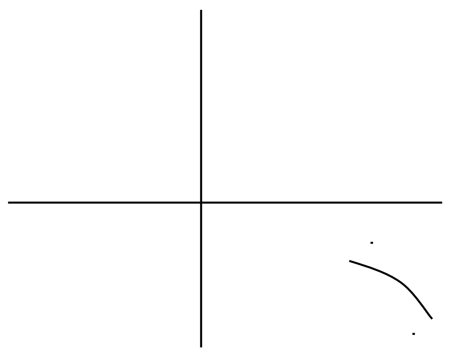
4° Tipo

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ esso si suddivide in quattro limiti

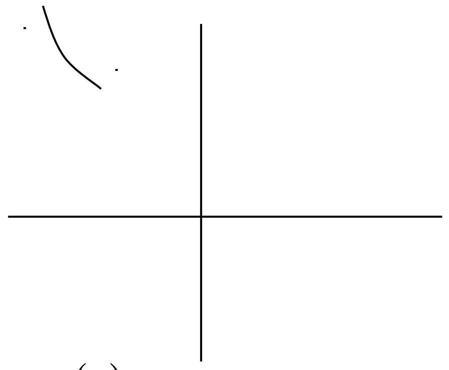
a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



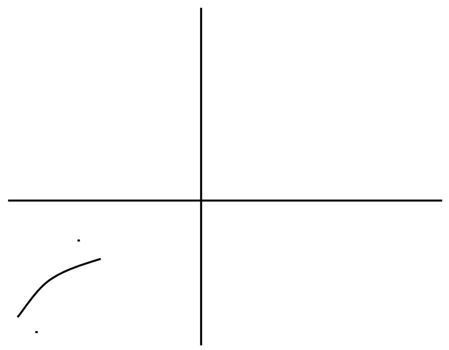
b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



c. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



d. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



I limiti del tipo 2 e 3 sono determinanti per la ricerca degli asintoti (non tocco) in uno studio di funzione, dal momento che riesco a sapere come si comporta la funzione vicino ad un punto estremo del campo di esistenza o all'infinito positivo o negativo.
In particolare con il limite del 2° tipo nella sua declinazione nei sottocasi:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

trovo l'asintoto verticale che è la retta $x = x_0$ alla quale la funzione si avvicina indefinitivamente senza mai toccarla. (vedi grafici)
Con il limite del 3° tipo nella sua declinazione anch'esso nei sottocasi:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

trovo l'asintoto orizzontale che è la retta $y = l$ alla quale la funzione si avvicina come prima specificato.

Mediante il concetto di limite e' possibile dare un senso matematico a limiti quali
∞
$1/0 = \infty$
$1/\infty = 0$
$\infty/0 = \infty$
$0/\infty = 0$
$\infty \cdot \infty = \infty$
Tuttavia vi sono ancora alcune forme cui non possiamo assegnare un valore: le cosiddette forme indeterminate:
Esse vanno trattate caso per caso, eccole

- ∞/∞
- $0/0$
- $0 \cdot \infty$
- $\infty - \infty$
- $0^{\infty}, 1^{\infty}\, e\, \infty^{0}$

Di cui solo le prime quattro saranno oggetto del nostro studio.

Studio della forma di indecisione ∞/∞:

Esempio: $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 4x - 4}{5x^2 + 6x - 3}$

Metto in evidenza, cioè raccolgo x^2 al numeratore ed al denominatore:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(3 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{\left(5 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = \frac{3}{5}$$

essendo il rapporto tra un numero e infinito tendente a zero.

Nota bene: **Per sciogliere la forma di indeterminazione ∞/∞ si raccoglie la parte letterale del monomio di grado più alto sia al numeratore che al denominatore e poi si esegue la semplificazione, questo comporta che per calcolare il limite basta calcolare il limite del rapporto dei loro termini di grado massimo.**

Studio della forma di indecisione $0/0$

Esempio: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Se sostituisco il 2 alla x ed eseguo i calcoli ottengo $0/0$, che in matematica non ha significato.

Osservo che se la definizione di limite che abbiamo dato è valida l'errore non deve essere nel limite, ma nella funzione: infatti avremo il limite $0/0$ solo se la funzione si annulla contemporaneamente al numeratore e al denominatore, allora per calcolare il limite basterà togliere nella funzione la causa dell'indeterminazione scomponendo numeratore e denominatore e semplificando:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

<u>Nota bene:</u> **Per sciogliere la forma di indeterminazione $0/0$ si scompongono i polinomi al numeratore e al denominatore e poi si sempl ifica.**

Esiste un **<u>caso particolare</u>** di scioglimento di una forma di indeterminazione $0/0$ quando uno dei due polinomi ha una parte formata da un radicale, ecco un esempio:

Esempio: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ il limite si presenta nella forma $0/0$. Per rimuovere l'indeterminazione razionalizziamo il numeratore moltiplicando per il fattore razionalizzante:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+9)-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{6}.$$

<u>Studio della forma di indecisione</u> $\infty\cdot 0$

Per risolverli basta ricordare che $\frac{1}{0}=\infty$ e quindi trasformare in modo da tornare al caso precedente.

<u>Studio della forma di indecisione</u> $\infty-\infty$

Come per lo scioglimento della forma di indeterminazione $0/0$ si raccoglie la potenza più alta del polinomio e si fa il limite con esso.

<u>Caso particolare</u>. Inoltre esiste anche in questo caso la possibilità di avere dei polinomi dove compare un radicale, allora si moltiplica ancora per il fattore razionalizzante, come nell'esempio:

Esempio: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x$ in questo caso se procedessimo operando soltanto dei raccoglimenti non riusciremmo ad eliminare l'indeterminazione, ma trasformarla nella forma $0\cdot\infty$, anche in questo caso occorre operare una razionalizzazione, ecco come:

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+x+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=\frac{1}{2}$$

Con il concetto di limite si può definire quando una funzione è continua, proprietà che ha delle caratteristiche molto interessanti.

Intuitivamente possiamo dire che una funzione si dice continua quando possiamo disegnarla senza staccare la penna dal foglio (o il gessetto dalla lavagna) ma si può darne una definizione matematica precisa utilizzando il concetto di limite:

<u>Definizione di continuità di una funzione</u>:
Una funzione si dice continua in un punto quando in quel punto coincide con il suo limite
Una funzione si dice continua in un intervallo quando e' continua in ogni punto dell'intervallo
in linguaggio matematico:

f(x) è continua nel punto x_0 *se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

f(x) è continua in un intervallo se in ogni punto dell'intervallo vale il limite suddetto.

Se in x_0 *funzione è continua allora il limite da destra e da sinistra sono finiti e uguali.*

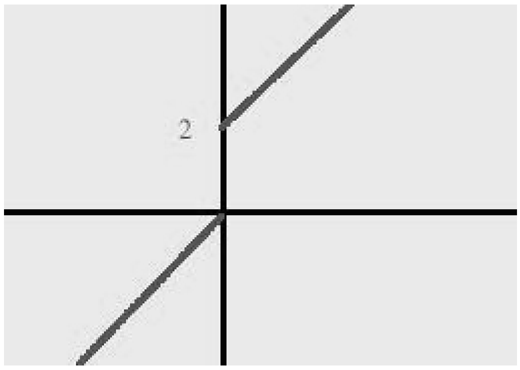
Una funzione si dice discontinua quando non è continua:
Possiamo raggruppare le discontinuità in tre gruppi:

1. Discontinuità di prima specie
2. Discontinuità di seconda specie
3. Discontinuità di terza specie

1. Una discontinuita' si dice di prima specie se esistono finiti i limiti destro e sinistro ma i due limiti sono diversi.

Esempio: consideriamo la funzione cosi' definita:

$$y = \begin{cases} x & per\ x < 0 \\ x + 2 & per\ x \geq 0 \end{cases}$$



essa presenta una discontinuita' di prima specie nel punto zero: infatti:

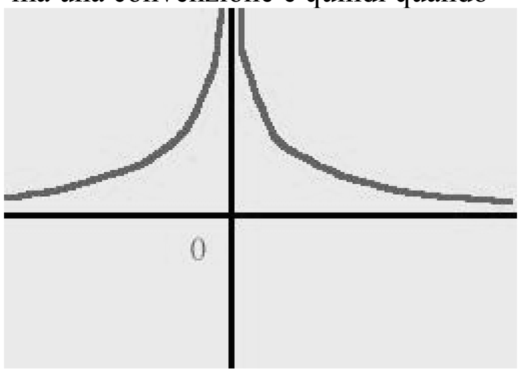
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

2. Una discontinuita' e' di seconda specie se la funzione in un punto vale infinito: ricordiamoci che infinito non e' un punto ben preciso ma una convenzione e quindi quando la funzione vale infinito non e' definita.

Esempio di discontinuita' di seconda specie:
la funzione

$$y = \frac{1}{x^2}$$

presenta una discontinuita' di seconda specie nel punto 0



3. E' il caso in cui la funzione in un punto
a) non esiste
oppure
b) esiste ma risulta di valore diverso dal limite

E' comunque possibile eliminare tale discontinuita' attribuendo alla funzione in quel punto il valore del suo limite

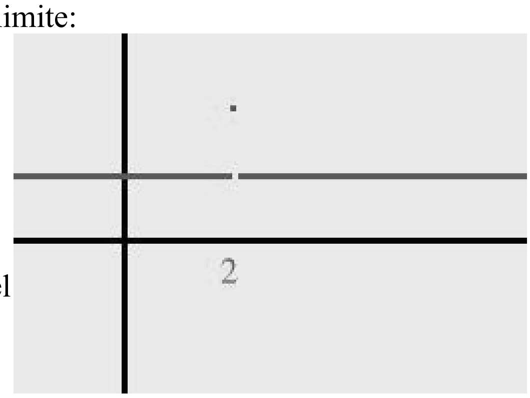
a) caso in cui la funzione non esiste e' gia' visto nelle forme indeterminate: ad esempio la funzione

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

non esiste nel punto 2 ed il suo limite in tale punto vale 4;
attribuendo 4 al valore della funzione in quel punto la discontinuita' e' eliminata

b) caso in cui la funzione ha valore diverso dal suo limite:
l'esempio classico di questa discontinuita' e' la funzione impulso:

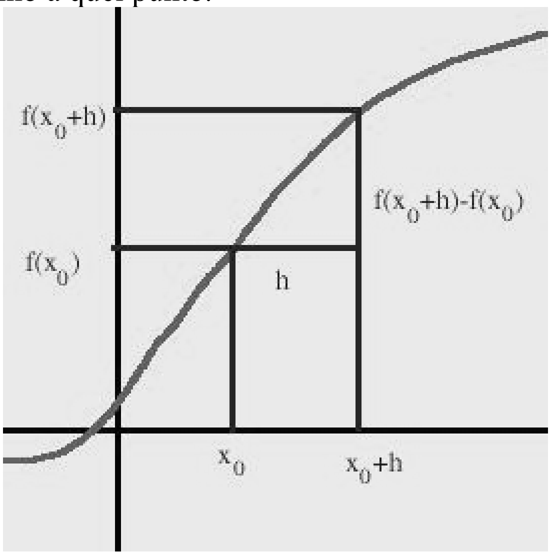
$$y = \begin{cases} 1 & per\ x \neq 2 \\ 2 & per\ x = 2 \end{cases}$$



Bastera' assegnare alla funzione il valore 1 anche nel punto 2 per eliminare la discontinuita' .

Appunti sulla derivata

Il concetto di limite, sebbene utilissimo per sostituire ad un punto un intervallo ha comunque dei difetti: infatti applicando il concetto di limite ad un punto io posso avere solamente una visione locale di una funzione: e' come se volessi studiare una strada di notte approfittando della luce di qualche lampione: potro' vedere in quel punto e nelle vicinanze di quel punto ma se voglio sapere cosa succede un po' piu' in la' dovro' avere un altro lampione.
E' possibile definire un altro strumento matematico che permette di studiare la funzione in maniera più globale: la derivata.
Essa esprime come varia la funzione al variare regolare della variabile indipendente x
Intuitivamente il sistema piu' semplice e' quello di considerare un intervallo sulla y ed il corrispondente intervallo sulle x e farne il rapporto: questo mi dara' la variazione media. Se voglio la variazione in un punto dovro' restringere gli intervalli fino a quel punto.
Matematicamente: considero sull'asse x i punti x_0 e x_0+h, in loro corrispondenza avro' i punti $f(x_0)$ ed $f(x_0+h)$ sull'asse y.
La distanza tra $f(x_0)$ ed $f(x_0+h)$ sull'asse y (in verticale) sara'
$f(x_0+h) - f(x_0)$
mentre la distanza tra x_0+h ed x_0 sull'asse x sara'
$x_0+h - x_0=h$
chiamiamo rapporto incrementale il rapporto tra la distanza sull'asse y e la distanza sull'asse x:



$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \text{rapporto incrementale}$$

Ora per ottenere la derivata nel punto x_0 bastera' far stringere l'intervallo facendo diminuire h

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Definizione di derivata: si definisce derivata di una funzione in un punto il limite (se esiste ed e' finito) del rapporto incrementale al tendere a zero dell' incremento h

Storicamente uno dei problemi che ha portato alla scoperta della derivata è stato la ricerca della tangente ad una curva, vediamo come la derivata ha risolto tale problema:
Ricordando che il coefficiente angolare di una retta è il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di due punti qualunque della retta, cioè:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{y_Q - y_P}}{\mathbf{x_Q - x_P}}$$

e prendendo in considerazione i due punti $\mathbf{P(x_0;f(x_0)}$ e $\mathbf{Q(x_0+h;f(x_0+h)}$, punti d'intersezione della curva con la retta secante s (vedi figura), risulta che:

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

il rapporto incrementale di una funzione nell'intorno di un suo punto è il coefficiente angolare della retta secante passante per il punto dato e per il punto di ascissa incrementata.

Come si nota dal grafico riportato più sotto se avviciniamo il punto Q a P avremo in questo punto la retta tangente, questo si opera eseguendo il limite del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento, cioè la formula con cui abbiamo definito la derivata.

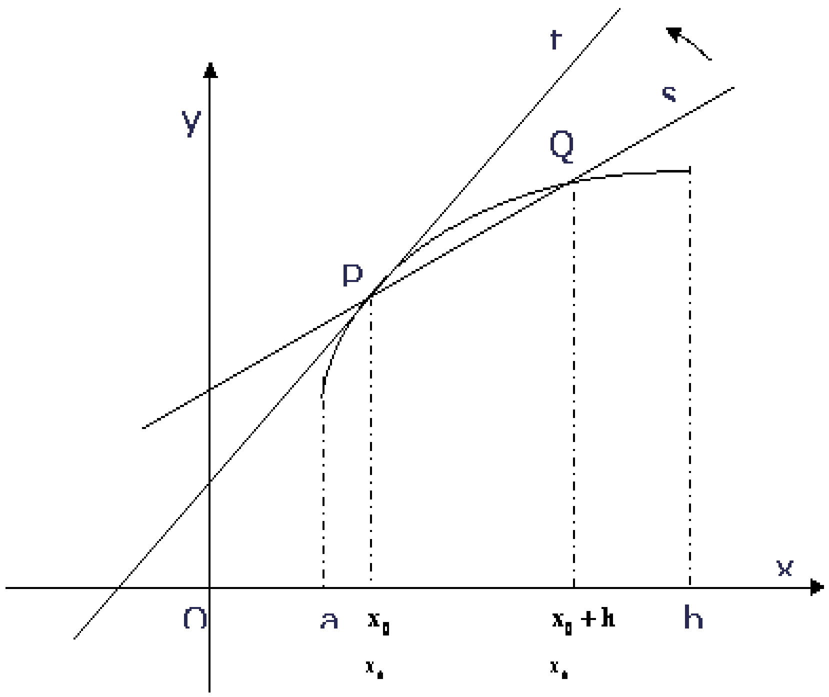


Figura 2

La derivata della funzione $y = f(x)$ nel punto di ascissa x_0 si suole indicare con una qualunque delle seguenti notazioni:

$$y'(x_0) \; , \; f'(x_0) \text{ oppure } \dot{f}(x_0) .$$

Può darsi che, pur non esistendo il limite per **h** che tende a zero del rapporto incrementale, esista e sia finito tuttavia il limite a desta o il limite a sinistra, questi si chiameranno allora, rispettivamente,

derivata destra e **derivata sinistra** della funzione $y = f(x)$ in x_0, e si rappresenteranno con i simboli $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, si ha quindi, per definizione:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Partendo dal significato geometrico del rapporto incrementale e osservando che al tendere di **h** a zero, il punto **Q** tende a **P** e la retta **secante** , passante per i punti **P** e **Q** , tende a disporsi **tangente** alla curva nel punto **P**, si può affermare che: la derivata di una funzione in un suo punto è uguale al coefficiente angolare della tangente alla curva in quel punto.

Per avere la derivata generica bastera' considerare il punto come x, cioe' non fisso ma generico sull'asse delle x.
Visto che la derivata, per come e' costruita mi da' la velocita' con cui varia la y al variare della x, sara' possibile utilizzare le derivate in tutti quei fenomeni ove ci interessa avere la velocita' di variazione del fenomeno stesso:
ad esempio potremo calcolare la variazione dello spazio rispetto al tempo, cioe' la velocita', oppure la variazione della velocita' rispetto al tempo, cioe' l'accelerazione, oppure la velocita' di una reazione chimica o il flusso di una corrente elettrica eccetera

Comunque ora dobbiamo cercare di capire come funziona questo nuovo oggetto per poterlo poi utilizzare al meglio: vediamone quindi alcune proprietà.

Proprietà:

Partendo dalla definizione, si possono dimostrare le seguenti proprietà che definiscono la linearità dell'operazione di derivata.

6. la derivata di una somma di funzioni è uguale alla somma delle derivate delle funzioni.
7. la derivata del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la derivata della funzione.

In più occorre sapere come l' operatore di derivata si comporta in queste altre situazioni:

8. la derivata del prodotto di due funzioni, $y = f(x) \cdot g(x)$ è di seguito riportata:
   $$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
9. la derivata del quoziente di due funzioni, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ risulta:
   $$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$
10. la derivata di una funzione composta, $y = f(g(x))$, diventa: $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

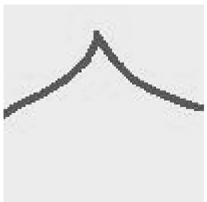
Per rendere i calcoli più semplici riportiamo lo schema delle funzioni che vengono considerate in quest'anno scolastico:

Tabella delle principali derivate di funzioni semplici:

Funzione	Derivata
$y = \cos\tan te$	$y^{'} = 0$
$y = x$	$y^{'} = 1$
$y = x^{n}$	$y^{'} = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y^{'} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

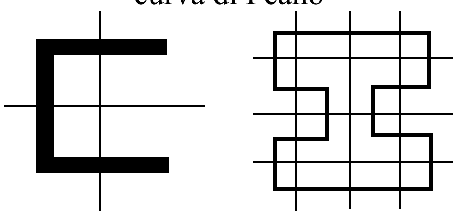
Relazioni fra continuita' e derivabilita'

C'e' da dire subito che una funzione continua non e' sempre derivabile, infatti se ho un punto con un angolo (punto angoloso) non ho la derivata perche' la derivata destra e' diversa dalla derivata sinistra, inoltre posso pensare curve che non hanno nessun punto derivabile: la curva di Peano, la curva di von Kock.



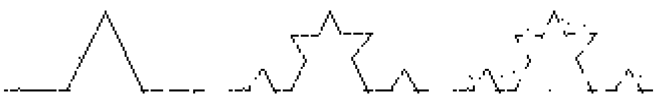
---

curva di Peano



Per costruire la curva di Peano su un quadrato dividilo in 4 parti e considera i centri dei sottoquadrati, congiungili con dei segmenti (prima figura) dividi poi ognuno dei sottoquadrati in 4 sotto-sottoquadrati e congiungili come vedi nella seconda figura. Continuando il procedimento riempirai tutto il quadrato con una curva che non sara' derivabile in nessun punto

curva di von Kock



prendi un segmento, dividilo in tre parti uguali e su quella in mezzo al posto del segmento prendi due lati di un triangolo equilatero, ripeti il procedimento su ognuno dei 4 segmenti cosi' ottenuti, Procedendo all' infinito la curva che si ottiene non ha nessun punto derivabile.
Dimostriamo, a completamento della trattazione, che se una funzione e' derivabile allora e' anche continua.
Ho per ipotesi che esiste la derivata finita $f'(x_0)$, devo dimostrare che allora la funzione e' continua
La definizione di continuita' e' che
$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ od anche $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ cioe' $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$
Dimostrazione:
Parto dall'espressione:
$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0)$ devo dimostrare che vale zero

Moltiplico sopra e sotto per h

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h =$$

la prima parte del prodotto e' la derivata
$= f'(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$
come volevamo dimostrare.

Vediamo ora l'utilità della derivata per il nostro obiettivo di trovare il grafico di una funzione algebrica:

Con la derivata è possibile trovare i punti di massimo , minimo o flesso a tangente orizzontale, vediamo come.

Poiche' la derivata corrisponde al coefficiente angolare della tangente, se la derivata e' positiva significa che la tangente tende verso l'alto quindi la curva dovrà essere crescente:

Regola:

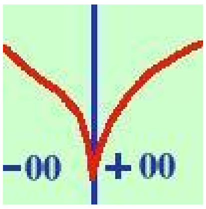
5. *se in un intervallo la derivata e' positiva allora nell'intervallo la funzione sarà crescente*
6. *se invece nell' intervallo la derivata e' negativa allora la funzione sarà decrescente*

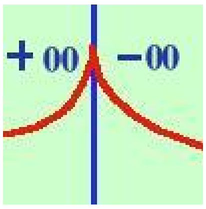
quindi per trovare i punti di massimo e minimo relativo di una funzione sarà necessario e sufficiente trovare il segno della derivata prima:

1. se succede che a sinistra dello zero del polinomio è positiva e a destra negativa sono in presenza di un punto di massimo
2. se succede che a sinistra dello zero del polinomio è negativa e a destra pssitiva sono in presenza di un punto di minimo
3. se succede che a sinistra e a destra dello zero del polinomio ho lo stesso segno sono in presenza di un punto di flesso a tangente orizzontale ascendente se ho tutto positivo, discendente se ho tutto negativo.

Per finire la trattazione a volte il dominio della funzione derivata non è lo stesso della funzione iniziale allora sono in presenza di una fra le situazioni descritte sotto.
Chiameremo punti angolosi quei punti di funzioni continue in cui la derivata destra e' diversa dalla derivata sinistra: cioe' la tangente venendo da destra e' diversa dalla tangente approssimandomi da sinistra. un esempio immediato puo' essere dato da una funzione ai moduli: Esempio
$y = | x^2 - 5x + 6 |$.

Tra i punti angolosi distinguiamo le cuspidi ove le tangenti destre e sinistre hanno coefficiente angolare una piu' e l'altra meno infinito:





Per determinare la curva nei punti angolosi basta determinarne le tangenti, con la nota formula
$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
trovando la derivata destra e sinistra e calcolandone il valore per x_0.

Domande di Esame

1. Qual è la definizione di funzione
2. Come si determina il dominio(codominio) di una funzione
3. Dato un grafico di una funzione nel piano cartesiano come si trovano dominio e codominio
4. Come si trova il dominio di una funzione fratta(irrazionale)
5. Cosa vuol dire funzione pari o dispari e che tipo di simmetrie ho con queste proprietà
6. Cosa vuol dire funzione crescente e decrescente
7. Fammi un esempio di funzione che sia crescente in una certa zona e decrescente in un'altra
8. In che cosa consiste il metodo degli intervalli
9. Che differenza sussiste tra estremo superiore e massimo
10. Che differenza sussiste tra dominio e campo di esistenza
11. Qual è la definizione di funzione composta
12. Si può sempre fare la funzione composta tra due funzioni
13. In che cosa consiste il concetto di limite
14. A cosa serve il limite per le funzioni
15. Qual è la definizione di limite
16. Quanti casi di limite ci sono
17. Dove si fanno i limite in uno studio di funzione
18. Quali sono gli asintoti e come sono definiti
19. Quante forme di indeterminazione hai studiato
20. Fammi un esempio di funzione che abbia limite infinito in un certo punto
21. Fammi un esempio di una funzione che sia positiva in una zona e negativa in un' altra
22. Cosa significa intersezioni con gli assi
23. Come si esprime nel piano cartesiano il dominio(segno della funzione)
24. Qual è la definizione di continuità
25. Fammi un esempio di una funzione discontinua in un certo punto
26. Quante discontinuità conosci
27. Fammi un esempio di una funzione che presenta una discontinuità di prima(seconda)(terza) specie
28. Cosa si intende come grafico di una funzione
29. Qual è la definizione di derivata di una funzione in un punto
30. Qual è il significato geometrico della derivata
31. Come si trovano i massimi e minimi relativi con lo studio della derivata
32. Trovami la derivata di alcune funzioni semplici
33. Come si trova la derivata della funzione composta
34. Come si studia la crescenza e la decrescenza con la derivata.